Espacios cuánticos en geometría no conmutativa

Años o vigencia del Proyecto: 01/01/2009 al 31/12/2011.

Descriptores o palabras clave: Tripletes espectrales; grupos cuánticos; álgebras de Hopf; teoría cuántica de campos; espacios no conmutativos.

Investigadores:

- Investigador Principal: Varilly Boyle Joseph C.
- Asociados o Colaboradores: Ugalde Gómez William J.

Antecedentes, justificación y descripción del proyecto:

El proyecto "Espacios cuánticos en geometría no conmutativa" se concibe como sucesor directo del proyecto 820-A6-120, titulado "Geometría no conmutativa y simetrías cuánticas". En la geometría no conmutativa, un espacio topológico se describe por su álgebra de funciones continuas, una variedad diferencial se describe por su álgebra de funciones diferenciables, un grupo de Lie compacto se describe por el álgebra de Hopf de sus funciones representativas, y una variedad con métrica riemanniana se describe por un triplete espectral (A,H,D) [9,17]. Para ser preciso, solamente el primero de esas correspondencias es contundente, al definir una equivalencia de categorías entre espacios topológicos compactos y C*-álgebras conmutativas con unidad [8]. El tema de este proyecto es el afinamiento de estas correspondencias en los demás casos, donde persisten problemas abiertos.

En el caso de las variedades riemannianas con una estructura de espín, unos resultados recientes --debidos en buena parte al trabajo del Proyecto 820-A6-120, antecesor de éste-- confirman que la variedad diferencial puede ser reconstruida a partir de un triplete espectral que obedece una media docena de condiciones axiomáticas de tipo algebraico [2,16]. En defecto de una estructura de espín, se buscan condiciones de permite identificar la métrica riemanniana: esto es uno de los mayores problemas básicos de la geometría no conmutativa [14]. En el caso no compacto, donde el álgebra no posee unidad, la lista de tripletes espectrales no conmutativos es bastante corta, y hace falta obtener más ejemplos para perfilar la teoría. Los ejemplos conocidas poseen en cada caso un grupo de Lie de simetrías [5,6,7] bajo el cual el triplete (A,H,D) es equivariante.

Alternativamente, se puede mantener la unitalidad del álgebra pero se reemplaza el grupo de simetría por un álgebra de Hopf o un grupo cuántico [1]: actualmente esta es un campo de trabajo muy activo [3,4,12]. Hace falta obtener ejemplos no compactos, donde probablemente se requiere emplear los llamados grupos cuánticos localmente compactos [13,15]. Todos los tripletes espectrales mencionados corresponden en la física a unos "espacios no conmutativos de partículas". Para proceder a teoría de campos, lo usual es imponer un "producto no conmutativo" en la línea de Moyal sobre los términos del Lagrangiano antes de hacer una expansión perturbativa. Hace falta una aproximación mejor justificada a la construcción de campos cuánticos no conmutativos, aunque este es una tarea de romanos. Hay indicaciones que un buen lugar para comenzar es el algoritmo de Epstein y Glaser aplicado a campos externos [10,11], que merece al menos una exploración preliminar.

Objetivo general y específicos:

- Objetivo General:

Desarrollar la teoría de los espacios cuánticos, con énfasis en los tripletes espectrales de la geometría no conmutativa, para extender el alcance de esa teoría con ejemplos relevantes para la física de interacciones fundamentales.

- Objetivos Específicos:

Caracterizar las variedades riemannianas sin espín mediante tripletes espectrales.

Construir ejemplos de tripletes espectrales no compactos cuya simetría es dado por un grupo de Lie

Identificar uno o más tripletes espectrales cuya simetría es dado por un grupo cuántico localmente compacto.

Explorar los campos cuánticos no conmutativos generados por campos externos.