Proyecto: *Grupoides simplécticos de grupos de difeomorfismos.*

Años: 2002-2004.

Descriptores:
Grupoides, Grupoides simplécticos, cuantización por deformación, grupos de difeomorfismos.

Investigadores:
-Carlos Alberto Torres Rodríguez
Escuela de Matemática.
-Joseph Varilly Boyle
Escuela de Matemática
Catedrático

Antecedentes, justificación y descripción del proyecto:

A- Antecedentes
La teoría de cuantización por deformación es un modelo matemático del principio de correspondencia (entre la física clásica y la cuántica), constituyendo un método para desarrollar la mecánica cuántica a partir del álgebra de observables clásica, en la dirección del álgebra de Poisson. Los principios generales son atribuidos a Dirac desde el inicio de la mecánica cuántica. El ejemplo fundamental es el producto de Moyal-Weyl en el espacio de fases euclideo, usado por Moyal para estudiar mecánica cuántica estadística desde el punto de vista del espacio de fases clásico.

Desde el punto de vista cohomológico la deformación de álgebras fue establecido en 1960 por Gerstenhaber y utilizada en mecánica cuántica en 1975 por Bayen, Flato, Fronsdal, Lichnerowicz y Sternheimer, estableciendo una cuantización por deformación para variedades de Poisson con una conexión plana libre de torsión. En 1979 Gutt extiende el método a variedades simplécticas donde el tercer número de Bettie es cero.
Luego en 1983 Wilde y Lecomte demuestran la existencia de deformación para cualquier variedad simpléctica. Posteriores estudios de la existencia de tales deforma-ciones han sido hechas por Karasev en 1993, Omori en 1991, Weinstein en 1993 y Fedesov en 1994 aportando éste una construcción geométrica a través de una estructura de Weyl.

Los grupoides son utilizados para modelar simetrías. Fueron introducidos en 1926 por Brandt en un estudio de formas cuadráticas. Posteriormente la teoría de Lie fue estén-dica a grupoides en 1960 por Pradines y su estructura diferenciable también fue estudia-da por Ehresman en 1980. Mackey los había utilizado en el estudio de acciones ergódi-cas de grupos. A través de los estudios de Karasev, Zakrzewski y Weinstein en 1990 se logra descubrir que pueden ser utilizados para construir una cuantización por deforma-ción. Weinstein construye precuantización de variedades de Poisson y cuantización del Toro en 1991. Várilly y Gracia-Bondía en 1994 descubren que la cuantización geomé-trica del espacio de fases euclideo se puede obtener a partir de su grupoide simpléctico.
En la última década esta dirección ha sido estudiada también por Connes, Rieffel y Landsman utilizando el grupoide tangente. En 1999 se obtiene una deformación estricta del fibrado cotangente de una variedad de Riemann utilizando el grupoide tangente, por Cariñena, Clemente, Follano, Gracia-Bondía y Várilly.

B- Justificación

El proyecto se desarrolló en el área de cuantización por deformación (a través del grupoide simpléctico) de grupos de difeomorfismos.

Los grupos de difeomorfismos y otros espacios de dimensión infinita aparecen en la descripción de muchos sistemas físicos como espacios de configuración, de simetría o grupos gauge. Sin embargo, muchoas dificultades geométricas surgen en la categoría de variedades que no son Banach. Por este motivo se han hecho varios intentos de sustituir la teoría clásica de diferenciación de espacios de Banach. Uno de ellos es la teoría de difeologías desarrollada por Souriau, Donato, Iglesias y Torre. En los últimos años se ha construido una estructura tangente en los subgrupos de difeomorfismos y órbitas coad-juntas, así como una estructura simpléctica y un álgebra de Poisson en estos últimos, permitiendo de esta forma obtener una precuantización y definir estructuras geométricas en espacios de dimensión infinita. También se ha obtenido la relación de esta teoría con la de espacios convenientes. Los resultados obtenidos en este campo por C. Torre permiten hacer investigación de los respectivos grupoides simplécticos, con el fin de extender los métodos conocidos de cuantización por deformación en variedades simplécticas de dimensión finita, en las que J. Várilly ha tenido mucha participación en la última década. Para poder desarrollar este método se requirieron primero determinar las propiedades geométricas de las conexiones simplécticas y demás estructuras y posterior-mente el estudio de éstas en el grupoide tangente, ya que no son conocidos en este con-texto. Por este motivo se presentaron como objetivos iniciales del proyecto.

D- Bibliografía

[1] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz, D. Sternheimer, Deformation Theory and quantization, Ann. Phys. 11 (1978) 61-151.
[2] A.Connes, Nonconmutative Geometry, Academic Press, London, 1994.
[3] A. Fedesov, A simple geometrical construction of deformation quantization, J. Diff. Geometry, 40 (1994), 213-238.
[4] J. Gracia-Bondía, J. Várilly, From geometric quantization to Moyal quantization, Journal of Math. Physics, 36 (1995).
[5] N. Landsman, Strict deformation quantization of a particle in external gravitational and Yang-Mills fields. J. Geom. Phys. 12 (1993) 93-132.
[6] H. Omori, Y. Macda & A. Yoshioka, Weyl manifolds and deformation quantization, Advances in Math, (china= 85 (1991), 224-255.
[7] M. Rieffel, Questions on Quantization, Berkeley, 1997; quant-.ph\9712009.
[8] J. Souriau, Un algoritme génerateur de structures quantiques, Astérisque, hors série (1985), 341-399.
[9] C. Torre, A tangent bundle on diffeological spaces, 1998, Math\9801046.
[10] C. Torre and A. Banyaga, A symplectic structure on coadjoint orbits of diffeomorphism subgroups, Ciencias y Tecnología 17, No 2, (1993), 1-14.
[11]C. Torre, The definition of a differential form on a tangent structure, Preprint (2001).
[12] J. Várilly, An introduction to nonconmutative geometry, Lectures at the EMS Summer School on nonconmutative geometry and applications, Monsaraz and Lisboa, 1997, Physics\9709045.
[13] A.Weinstein & P. Xu, Extensions of symplectic groupoids and quantization, J. reine angew. Math. 417 (1991), 159-189.
[14] A. Weinstein, Deformation quantization, Seminaire Bourbaki, No 789 (1994).

Objetivo general
Encontrar procedimientos para construir una cuantización geométrica por deformación, de sistemas hamiltonianos de dimensión infinita.